Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2018

MATEMATIKA

za VII razred osnovne škole

1. Formiran je niz brojeva po sljedećem pravilu: prvi broj u nizu je jednocifren, a svaki sljedeći je dobijen tako što je broj ispred njega uvećan za 9. Naći prvi broj u nizu ako se zna da je broj 2018 jeste element ovog niza.

2. U jednom odjeljenju koje broji više od 20 a manje od 30 učenika organizovane su različite sekcije. Petina učenika koji pohađaju matematičku sekciju, pohađaju istovremeno i sekciju za fiziku, a četvrtina učenika koji pohađaju sekciju za fiziku pohađaju i matematičku sekciju. Petar i Marko su jedini u odjeljenu koji ne pohađaju nijednu sekciju. Koliko ima učenika u odjeljenju, koliko njih pohađa matematičku, koliko fizičku sekciju, a koliko obje?

3. U trouglu ABC na stranici AC izabrane su tačke D i E takve da je $AD = DE = EC$. Može li se dogoditi da bude $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$? Obrazložiti odgovor.

4. Na novogodišnoj traci postavljene su crvene i plave lampice tako da pored svake crvene stoji bar jedna plava lampica. Koliki je najveći mogući broj crvenih lampica, ako se zna da je ukupan broj lampica 50?

Vrijeme rada: 180 minuta.
Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.
Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.

Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2018

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za VII razred osnovne škole

1. Formiran je niz brojeva po sljedećem pravilu: prvi broj u nizu je jednocifren, a svaki sljedeći je dobijen tako što je broj ispred njega uvećan za 9. Naći prvi broj u nizu ako se zna da je broj 2018 jeste element ovog niza.

   Rješenje: Primijetimo da je $2018 = 224 \cdot 9 + 2$. Dakle, prvi broj u nizu je 2.

2. U jednom odjeljenju koje broji više od 20 a manje od 30 učenika organizovane su različite sekcije. Petina učenika koji pohađaju matematičku sekciju, pohađaju istovremeno i sekciju za fiziku, a četvrtina učenika koji pohađaju sekciju za fiziku pohađaju i matematičku sekciju. Petar i Marko su jedini u odjeljenju koji ne pohađaju nijednu sekciju. Koliko ima učenika u odjeljenju, koliko njih pohađa matematičku, koliko fizičku sekciju, a koliko obje?

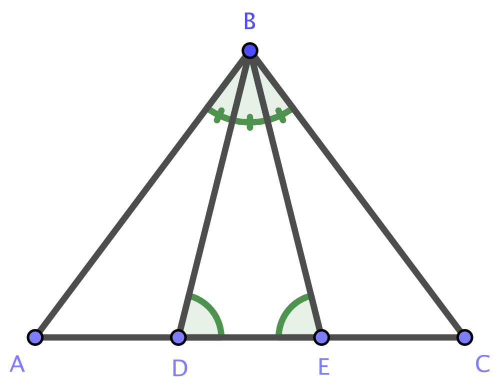
   Rješenje: Označimo sa x broj učenika koji pohađaju i matematičku i fizičku sekciju. Tada je broj onih koji pohađaju matematičku $5x$, a broj onih koji pohađaju fizičku $4x$. Broj onih koji pohađaju samo matematičku sekciju je $5x - x = 4x$, a broj onih koji pohađaju samo fizicku sekciju jednak je $4x - x = 3x$. Dakle, ukupan broj učenika u odjeljenju je:

$$4x + 3x + x + 2 = 8x + 2,$$

   i taj broj mora biti između 20 i 30, tj. $18 < 8x < 28$. Jedini prirodni broj koji zadovoljava ovaj uslov je $x = 3$, pa je broj učenika koji pohađaju matematičku sekciju $5 \cdot 3 = 15$, ukupan broj učenika koji pohađaju fizičku sekciju je $4 \cdot 4 = 12$, a ukupan broj učenika u odjeljenju je $8 \cdot 3 + 2 = 26$.

3. U trouglu ABC na stranici AC izabrane su tačke D i E takve da je $AD = DE = EC$. Može li se dogoditi da bude $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$? Obrazložiti odgovor.

Rješenje: Posmatrajmo trougao ABE. Tada je BD njegova težišna linija, pa ako bi bilo $\angle ABD = \angle DBE$ tada bi BD bila i simetrala ugla. To bi značilo da je ΔABE jednakokraki sa osnovicom AE, pa bi BD bila njegova visina i simetrala ugla. Slično se zaključuje da je ΔDBC jednakokraki sa osnovicom DC, pa je BE njegova visina i simetrala ugla. Dobijamo, iz tačke B postoje dvije normale na pravu AC, što je nemoguće. Dakle, ne postoji trougao kod koga je uslov $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$ zadovoljen.



4. Na novogodišnoj traci postavljene su crvene i plave lampice tako da pored svake crvene stoji bar jedna plava lampica. Koliki je najveći mogući broj crvenih lampica, ako se zna da je ukupan broj lampica 50?

Rješenje: Iz uslova zadatka slijedi da među svake 3 uzastopne lampice je bar jedna plava (3 crvene lampice ne mogu stajati jedna do druge). To znači da među prvih 48 lampica ima bar $48 : 3 = 16$ plavih, tj. najviše 32 crvene lampice. Primijetimo da poslednje dvije lampice (49. i 50.) ne mogu biti obje crvene, pa crvenih ne može biti više od $32 + 1 = 33$. Pokažimo da možemo postaviti lampice tako da zadovoljavaju uslove zadatka, i da bude 33 crvenih lampica. Ako plave lampice postavimo na mjestima $2, 5, 8, 11, \ldots, 47$ i između njih crvene, a od dvije poslednje dvije bude jedna plava i jedna crvena, tada ćemo ukupno imati 33 crvene i 17 plavih lampica.